MATHEMATIQUES **Options : Générale** **Coefficients : 7**

Vendredi 31 mai 1991 de 8 H 00 à 12 H 00

Afin de donner aux candidats toute la sérénité souhaitable, quant au bon déroulement des épreuves, le directeur du département de mathématiques de l'ESCC rappelle que les restrictions du programme ne concernent que les concepteurs des sujets.

EXERCICE N°1

PARTIE 1 x est un réel, n un entier naturel.

La suite (P_n) de polynômes est définie par : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 2(x+1)$ et pour $n \geqslant 2$, la relation de récurrence - notée (R) -

$$P_n(x) - 2(x+1)P_{n-1}(x) + (x^2+2x+2)P_{n-2}(x) = 0$$

1. Calculer $P_2(x)$
2. Démontrer que la suite (α_n) définie par : $\alpha_n(x) = (x+1-i)^{n+1}$ vérifie la relation (R). (rappel : $i \in \mathbb{C}$, $i^2=-1$)
3. On pose $\beta_n(x) = P_n(x) + \frac{1}{2i} \cdot \alpha_n(x)$

   Démontrer que (β_n) est une suite géométrique.
4. En déduire que : $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2k \leqslant n} C_{n+1}^{2k+1} \cdot (-1)^k \cdot (x+1)^{n-2k}$$

PARTIE 2 $$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$f^{(n)}(x)$ est la dérivée de f(x) d'ordre n . $f^{(0)}(x) = f(x)$

1. Calculer f'(x) et f"(x) . (dérivées première et seconde)
2. Démontrer, pour $n \geqslant 2$, la relation :

$$(x^2+2x+2)\, f^{(n)}(x) + 2n(x+1)\, f^{(n-1)}(x) + n(n-1)\, f^{(n-2)}(x) = 0$$

PARTIE 3 On se propose de démontrer que : $$f^{(n)}(x) = \frac{Q_{(n)}(x)}{(x^2+2x+2)^{n+1}}$$

où $Q_n(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à n.

. Donner les expressions de $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.

. Démontrer que : $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(x^2+2x+2)^{n+1}}$

. Donner l'expression de $Q_n(x)$ en fonction de $Q_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x)$, n et x $(n \geqslant 2)$.

PARTIE 4

1. Etablir la relation entre $P_n(x)$ et $Q_n(x)$.
2. En déduire l'expression de $Q_n(x)$.

A SUIVRE

EXERCICE N°2

PARTIE 1 Les réels x et t vérifient les inégalités : $x \geqslant t > 1$

1. Démontrer que : $\frac{2t}{1+t^2} > \frac{1}{t}$

2. En déduire que : $\int_1^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt > \ln x$

3. Posant : $I(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt$ (ln : logarithme népérien)

   Calculer la limite de I(x) quand x tend vers $+\infty$.

4. L'écriture $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2}$ a-t-elle un sens ?

PARTIE 2

1. Démontrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que :

   pour $t > A$, on ait $t\sqrt{t} < 1+t^2$

2. En déduire que, pour $x \geqslant A$: $\int_A^x \frac{dt}{1+t^2} < \frac{2}{\sqrt{A}}$

3. Posant $J(x) = \int_A^x \frac{dt}{1+t^2}$, démontrer que J est croissante et majorée.

4. L'écriture : $J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ a-t-elle un sens ?

5. Montrer que $J = \frac{\pi}{2}$.

PARTIE 3 Pour λ réel, la famille de fonction f_λ est définie par :

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t \in]-\infty, 0[\\ \frac{\lambda}{1+t^2} & t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer λ pour que f_λ soit une densité de probabilité.
   On note f cette densité de probabilité et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

2. Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ (repère orthonormé).
   Soit X la variable aléatoire de densité f

3. Calculer la probabilité : $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$

4. Que peut-on dire de l'espérance mathématique de X ?

5. Donner l'expression de la fonction de répartition F de X.

6. Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_F$ de F (repère orthonormé).

FIN